

每周工作汇报

姓名	侯宇轩	开始日期	2018.10.1	结束日期	2018.10.7
----	-----	------	-----------	------	-----------

1. 本周任务与计划

1.1 研究任务

阅读蔡老师新布置的论文：PDE-Net: Learning PDEs from Data，学习其中的方法，思考如何用其对 level-set 进行改进，来应用在神经纤维瘤分割上。

2. 本周工作概要

2.1 当前的进展

对文章 PDE-net 的不理解部分进行了研究。

阅读了作者之前发表的相关文章（本文的参考文献之一）：

Image Restoration: Wavelet Frame Shrinkage,

Nonlinear Evolution PDEs, and Beyond

对 PDE-net 的报告补充如下：

命题 2.1

Dong et al. (2017)使用以下推论将和规则的阶与微分算子的阶结合起来。

令 q 为一个 filter，带有和规则的阶 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ 。那么对于一个 \mathbb{R}^2 上的光滑函数 $F(x)$ ，有

$$\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} q[k] F(x + \varepsilon k) = C_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F(x) + O(\varepsilon), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

此外，若 q 对于某些 $K > |\alpha|$ 有全和规则的阶 $K \setminus \{|\alpha| + 1\}$ ，那么

$$\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} q[k] F(x + \varepsilon k) = C_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F(x) + O(\varepsilon^{K-|\alpha|}), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

根据命题 2.1，一个 α 阶的微分算子可以被一个具有和规则阶 α 的卷积 filter 所近似。同时，根据（4）式，若该 filter 有全和规则的阶 $K > |\alpha| + k, k \geq 1$ ，那么可以形成对微分算子的高阶近似。

例如，考虑一个 filter $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

它含有和规则的阶 $(1,0)$ ，一个全和规则的阶 $3/\{2\}$ 。根据推论，加上一个常数和适合的缩放， q 可以对离散化的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 进行二阶近似。

补充推导：（之前对 α 阶微分算子不理解）

从第二篇文章中得知，

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial \omega^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial \omega_2^{\alpha_2} \partial \omega_1^{\alpha_1}}.$$

那么， α 阶的微分算子即代表 $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial \omega_2^{\alpha_2} \partial \omega_1^{\alpha_1}}$ ，在例子中 $\alpha = (1,0)$ ，自然该 α 阶微分算子表示的是 $\frac{\partial}{\partial x}$ 。同时，全和规则的阶 $K \setminus \{|\alpha| + 1\} = 3 \setminus \{2 + 1\}$ ，因此有

$$\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} q[k] F(x + \varepsilon k) = C_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F(x) + O(\varepsilon^{K-|\alpha|}), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

其中 $K - |\alpha| = 3 - 1 = 2$ ，因此有二阶近似。

moment 矩阵(moment matrix)

下面介绍 moment 矩阵，用于 PDE-net 中对 filter 进行限制。对于一个 $N \times N$ filter q ，定义 q 的 moment 矩阵

$$M(q) = (m_{i,j})_{N \times N}, \quad (5)$$

$m_{i,j} = \frac{1}{(i-1)!(j-1)!} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} k_1^{i-1} k_2^{j-1} q[k_1, k_2]$ 其中 $i, j = 1, 2, \dots, N$. 为了简便，我们可以称 $M(q)$ 的第 (i, j) 号元素为 q 的 $(i-1, j-1)$ -moment. 将 (5) 与命题 2.1 结合，我们容易发现，应用了 $M(q)$ 的规则之后，filter q 可以被设计用来对任意微分算子进行任意阶的近似。

例如，我们想要对 $\frac{\partial u}{\partial x}$ （加上一个常数）使用卷积 $q \otimes u$ 来近似， q 为一个 3×3 的 filter。那么我们在 $M(q)$ 上考虑如下的约束：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 1 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}. \quad (6)$$

这里 \star 表示对对应位置没有约束。(6) 式中左边矩阵给出的约束可以保证至少一阶近似，而右边矩阵给出的约束可以保证至少二阶近似。特别地，若 $M(q)$ 的每一项均有约束，例如

$M(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，对应的 filter 可以被独一无二的确定。这种情况，我们称之为冻结(frozen) filter。

补充推导：（之前对约束的作用没有理解）

$$m_{ij} = \frac{1}{(i-1)!(j-1)!} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} k_i^{i-1} k_j^{j-1} q[k, k_v]$$

$$-1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{0!0!} \sum_k k_1^0 k_2^0 q[k, k_v] = 0 \Rightarrow \sum q[k, k_v] = 0$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{0!1!} \sum_k k_1^0 k_2^1 q[k, k_v] = 0 \Rightarrow \sum k_2 q[k, k_v] = 0$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{1!0!} \sum_k k_1^1 k_2^0 q[k, k_v] = 1 \Rightarrow \sum k_1 q[k, k_v] = 1$$

那可以验证, 对 $K=2$, $|\alpha| < K$ 均成立

$$\sum_{\substack{l, m \\ -1 \leq l, m \leq 1}} q[k, k_v] c_l^{\alpha_1} m^{\alpha_2} = 0$$

除了 $|\alpha|=1$ 的某些情况.

\Rightarrow 具有全和规则阶 $2/\{2\}$. ~~有~~ 一阶近似

$$\textcircled{4} \frac{1}{0!2!} \sum_k k_1^0 k_2^2 q[k, k_v] = 0$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{1!1!} \sum_k k_1^1 k_2^1 q[k, k_v] = 0$$

$$\textcircled{6} \frac{1}{2!0!} \sum_k k_1^2 k_2^0 q[k, k_v] = 0$$

结合 $\textcircled{1}-\textcircled{6}$, $\sum_{l, m} c_l^{\alpha_1} m^{\alpha_2} q[k, k_v] = 0$

对 $K=3$, $|\alpha| < K$ 均成立 除了 $|\alpha|=1$ 的一些情况

\Rightarrow 具有全和规则阶 $3/\{2\}$. 有二阶近似.

我在上述 PDE-net 文章时时间较长, 主要是本文涉及的数学概念较多, 有的我花费了一些时间推导, 有的我还在思考之中。

2. 下周工作计划

慢慢调整肝脏配准网络。

阅读 PDE-net 与 Level Set- PDE 的相关内容。

附表：工作整理

任务类型	任务内容	截止日期	当前进度
工作	肝脏分割比赛 (浙一举办) 负责 registraion 部分	结束	对肝脏配准继续 进行研究、调 整。
工作	神经纤维瘤研究 (中期目标)		蔡老师提出新方法：使用偏微分 方程网络 PDE-net 对 level set 进行 改进。正在学习 相关内容。

本周工作时长：2 小时*7 = 14 小时（国庆假期工作较少）。